



Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 7

Aufgabe 7.1. Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$.

Aufgabe 7.2. Sei A die σ -Algebra der messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Ein Mass μ auf A ist eine Funktion $\mu: A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit der Eigenschaften:

- i. $\mu(\emptyset) = 0$.
- ii. $\mu(E) \geq 0$ für jede $E \in A$.
- iii. $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$, wo $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Folge von paarweise disjunkte Mengen in A ist.

Sei $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine nicht negative integrierbare Funktion. Sei $\mu: A \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $\mu(E) := \int_E f dx$. Zeigen Sie, dass μ ein Mass auf A ist.

Aufgabe 7.3. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, seien $f_n := \frac{1}{n} \cdot 1_{[n, \infty)}$ und $g_n := \frac{1}{n} \cdot 1_{[0, n]}$. Zeigen Sie, dass

1. Die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergiert (sogar gleichmässig) nach 0 aber
 $0 = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx = \infty$. Ist das ein Widerspruch zum Levis Theorem?.
2. Die Folge $(g_n)_{n \geq 1}$ konvergiert (sogar gleichmässig) nach 0 aber
 $0 = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n dx = 1$. Ist das ein Widerspruch zum Levis Theorem?.

Aufgabe 7.4. Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.



Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium 7

Lösungsskizze

Aufgabe 7.1.

Seien $I := [0, \infty)$ und $f: I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, t) := e^{-tx}$. Dann für jede $t > 0$ die Funktion $x \mapsto f(x, t)$ ist integrierbar auf I mit

$$\int_I f(x, t) dx = \int_I e^{-tx} dx = \int_0^\infty e^{-tx} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-tx} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t} e^{-tx} \right]_0^k = \frac{1}{t}. \quad (\#)$$

Sei $F: (\frac{1}{2}, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $F(t) := \int_I e^{-tx} dx \underset{\text{nach } \#}{=} t^{-1}$. F ist unendlichmal differenzierbar mit

$$(-1) \cdot 1 \cdot t^{-2} = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} \int_I e^{-tx} dx \underset{\text{nach } (*)}{=} \int_I \frac{\partial}{\partial t} e^{-tx} dx = (-1) \int_I x e^{-tx} dx;$$

$$(-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot t^{-3} = \frac{d^2}{dt^2} F(t) = \frac{d}{dt} (-1) \int_I x e^{-tx} dx \underset{\text{nach } (*)}{=} (-1) \int_I \frac{\partial}{\partial t} x e^{-tx} dx = (-1)^2 \int_I x^2 e^{-tx} dx;$$

... induktiv ...

$$\begin{aligned} (-1)^n \cdot n! \cdot t^{-(n+1)} &= \frac{d^n}{dt^n} F(t) = \frac{d}{dt} (-1)^{n-1} \int_I x^{n-1} e^{-tx} dx \underset{\text{nach } (*)}{=} (-1)^{n-1} \int_I \frac{\partial}{\partial t} x^{n-1} e^{-tx} dx = \\ &= (-1)^n \int_I x^n e^{-tx} dx. \end{aligned}$$

Deswegen $(-1)^n \cdot n! = \frac{d^n}{dx^n} F(1) = (-1)^n \int_I x^n e^{-x} dx$. Also $n! = \int_I x^n e^{-x} dx = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$.

(*)

Sei $n \geq 1$. Für jede $x \in I$, die Funktion $(\frac{1}{2}, 2) \ni t \mapsto x^n e^{-tx}$ ist stetig differenzierbar und für jede $t > 0$, die Funktion $I \ni x \mapsto x^n e^{-tx}$ ist integrierbar. Ausserdem,

$\forall x \in I. \forall t \in (\frac{1}{2}, 2). x^n e^{-tx} \leq x^n e^{(-x/2)}$ und die Funktion $h_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, $h_n(x) := x^n e^{(-x/2)}$ ist integrierbar. Deswegen, nach §14 Satz 5, die Funktion

$(\frac{1}{2}, 2) \ni t \mapsto \int_I x^n e^{-tx} dx$ ist differenzierbar mit Ableitung $\int_I \frac{\partial}{\partial t} x^n e^{-tx} dx = (-1) \int_I x^{n+1} e^{-tx} dx$.

Aufgabe 7.2.

$$i. \mu(\emptyset) = \int_\emptyset f dx = \int f \cdot 1_\emptyset dx = \int 0 dx = 0$$

$$ii. \text{ Sei } E \in \mathcal{A}. \text{ Da } f \geq 0, \text{ dann } f \cdot 1_E \geq 0 \text{ und deswegen } \mu(E) = \int_E f dx = \int f \cdot 1_E dx \geq \int 0 dx = 0.$$

$$iii. \text{ Sei } (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ eine abzählbare Folge von paarweise disjunkte Mengen in } \mathcal{A} \text{ und } E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Für jede $n \in \mathbb{N}$, seien $B_n := \bigcup_{0 \leq i \leq n} E_i$ und $g_n := f \cdot 1_{B_n} = \sum_{i=0}^n f \cdot 1_{E_i}$. Dann sind für jede $n, i \in \mathbb{N}$

die Funktionen $g_n = f \cdot 1_{B_n}$ und $f \cdot 1_{E_i}$ integrierbar (nach §14, Satz 6). Ausserdem für beliebig $n \in \mathbb{N}$, da $g_n = f \cdot 1_{B_n} \leq f$, folgt

$$\int g_n dx = \int f \cdot 1_{B_n} dx \leq \int f dx \underset{\text{Da } f \text{ integrierbar}}{=} \|f\|_1 \underset{\text{Da } f \text{ integrierbar}}{<} \infty. \quad (*)$$

(*) zeigt dass $(\int g_n dx)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Aber $(g_n)_n$ ist eine monoton wachsende Folge; deswegen, nach Satz von Levi, die Funktion $f \cdot 1_E = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ (punktweise Limes) ist integrierbar (das wussten wir schon) mit $\mu(E) = \int_E f dx = \int f \cdot 1_E dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n dx =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \cdot 1_{E_n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{i=0}^n f \cdot 1_{E_i} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \int f \cdot 1_{E_i} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \int_{E_i} f dx =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mu(E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i).$

Aufgabe 7.3.

1.

Es ist klar dass $(f_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Dann $\forall n \geq N. \forall x \in \mathbb{R}. |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Dieses zeigt dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig gegen 0.

Keine Widerspruch zum Levis theorem, da $\|f_n\|_1 = \infty$, d.h. die Funktionen f_n sind nicht integrierbar (bezüglich unsere definition von integrierbarkeit).

Bemerkung: Es ist möglich Levis theorem für eine monoton wachsende Folge von messbare Funktionen $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ zu beweisen, **ohne** zu verlangen dass $(\int f_n dx)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Unsere vorherige Beispiel zeigt, dass für monoton fallende Folgen solche Theorem nicht gibt.

2.

Es ist leicht zu zeigen dass $(g_n)_{n \geq 1}$ gleichmässig gegen 0 konvergiert (analog wie in 1.). Ausserdem, die Funktionen g_n sind integrierbar mit $\forall n \in \mathbb{N}. \int g_n dx = 1$. Aber die Funktionen g_n sind weder monoton wachsend noch fallend: Für jede $n \geq 1$,
 $g_n(n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g_{n+1}(n)$ und $g_n(n+1) = 0 < \frac{1}{n+1} = g_{n+1}(n+1)$. Keine Widerspruch zum Levis theorem.

Aufgabe 7.4.

Sei $y \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Mit der Substitution $t = xy$, wir haben $dt = y dx$ und deswegen, nach der Substitutionregel folgt $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \int_0^\infty y e^{-(xy)^2} dx = \int_0^\infty y e^{-x^2 y^2} dx$. (*)

Sei $a := \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Dann

$$\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy \underset{\text{nach (*)}}{=} \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty y e^{-x^2 y^2} dx \right) e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2} y e^{-x^2 y^2} dx \right) dy = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-y^2 - x^2 y^2} dx dy \underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-y^2 - x^2 y^2} dy dx \underset{\text{Hauptsatz Analysis I}}{=} \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-y^2 - x^2 y^2}}{-2(1+x^2)} \right]_0^\infty dx = \int_0^\infty \frac{1}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} [\arctan(x)]_0^\infty = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Deswegen $a = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$.